

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**  
**Проректор по учебной работе**

**А.А. Воронов**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Функциональный анализ
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	А1360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра высшей математики
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: С.П. Коновалов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры высшей математики 11.04.2023

## Аннотация

Излагаются фундаментальные вопросы функционального анализа необходимые современному инженеру-исследователю: топологические и метрические пространства, линейные нормированные пространства, элементы теории линейных операторов в линейных нормированных пространствах.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

Изучение аппарата и методов функционального анализа, которые широко применяются для решения современных задач математической физики, квантовой механики, теории экстремальных задач, оптимального управления, и др.

#### Задачи дисциплины

- изучение топологических и метрических пространств, исследование их полноты, сепарабельности, пополнения;
- изучение компактных множеств в топологических и метрических пространствах, овладение методами исследования компактности;
- изучение линейных нормированных пространств;
- изучение теории линейных ограниченных операторов, в частности, линейных непрерывных функционалов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- определения топологического пространства, непрерывных отображений топологических пространств;
- определение метрического пространства, определения его полноты и сепарабельности, определение пополнения неполного метрического пространства;
- принцип Банаха сжимающих отображений полного метрического пространства и технику его применения;
- определения топологического и секвенциального компакта в топологическом пространстве и их связь, критерий компактности в метрическом пространстве;
- критерии вполне ограниченности множеств в стандартных метрических пространствах;
- определения линейного нормированного, банахова и гильбертова пространств, и их свойства;
- свойства ортонормированных базисов в сепарабельных гильбертовых пространствах, теорему о проекции;
- определение линейного ограниченного оператора, действующего в нормированных пространствах, определения нормы оператора, пространства линейных ограниченных операторов и его свойства, теорему Банаха–Штейнгауза; определение обратного оператора;
- определение пространства, сопряжённое к линейному нормированному пространству, теорему Рисса–Фреше, теорему Хана–Банаха.

уметь:

- исследовать полноту и сепарабельность метрического пространства, строить пополнение неполного метрического пространства;
- исследовать ограниченность, вполне ограниченность и компактность множества метрического пространства;
- исследовать эквивалентность норм в линейном пространстве, и уметь сравнивать топологии, порождённые разными нормами в линейном пространстве;
- вычислять норму и исследовать ограниченность линейного оператора, действующего в нормированных пространствах;
- исследовать различные сходимости последовательности линейных ограниченных операторов: по операторной норме и поточечную.

владеть:

- методами исследования полноты, сепарабельности и пополнения метрического пространства;
- методами исследования свойства вполне ограниченности множеств в стандартных метрических пространствах;
- методами вычисления нормы линейного оператора;
- методами нахождения сопряжённого пространства стандартных банаховых пространств.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Топологические пространства, база топологии.	5	5		6
2	Метрические пространства, полнота, сепарабельность, пополнение.	5	5		7
3	Компактные множества в топологических и метрических пространствах.	4	4		7
4	Линейные нормированные пространства.	4	4		6
5	Евклидовы и гильбертовы пространства.	4	4		6

6	Линейные операторы в линейных нормированных пространствах, норма оператора.	4	4		7
7	Сопряжённое пространство, теоремы Рисса–Фреше и Хана–Банаха.	4	4		6
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

##### 1. Топологические пространства, база топологии.

Топологические пространства, база топологии. Топологические и секвенциальные определения замкнутости и замыкания множеств топологического пространства и связь между ними. Топологическое и секвенциальное определение непрерывности отображения топологических пространств и связь между ними. Топологии поточечной и равномерной сходимости в пространстве функций, определённых на заданном множестве.

##### 2. Метрические пространства, полнота, сепарабельность, пополнение.

Метрическое пространство и метрическая топология. Примеры неметризуемых топологий. Полнота метрического пространства, принцип вложенных шаров и теорема Бэра. Сепарабельность метрического пространства. Пополнение неполного метрического пространства. Теорема Хаусдорфа о существовании пополнения. Принцип Банаха сжимающих отображений в полном метрическом пространстве.

##### 3. Компактные множества в топологических и метрических пространствах.

Топологическая, и секвенциальная компактность множеств топологического пространства и связь между ними. Вполне ограниченность множества метрического пространства. Критерий компактности метрического пространства. Теорема Арцела–Асколи о вполне ограниченности множества из пространства непрерывных функций, заданных на метрическом компакте.

##### 4. Линейные нормированные пространства.

Линейные нормированные пространства. Лемма Рисса о почти перпендикуляре и теорема Рисса о не вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве. Теорема об эквивалентности норм в конечномерном линейном пространстве. Полнота конечномерного подпространства линейного нормированного пространства.

##### 5. Евклидовы и гильбертовы пространства.

Евклидовы и гильбертовы пространства. Равенство параллелограмма. Теорема о существовании единственной метрической проекции вектора на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Ортогональное дополнение подпространства евклидова пространства. Теорема о разложении гильбертова пространства в прямую сумму замкнутого подпространства и его ортогонального дополнения. Полная ортогональная система векторов и ортогональный базис в сепарабельном гильбертовом пространстве. Критерий полноты ортогональной системы векторов в сепарабельном гильбертовом пространстве.

##### 6. Линейные операторы в линейных нормированных пространствах, норма оператора.

Линейные операторы в линейных нормированных пространствах, норма оператора. Пространство линейных ограниченных операторов, нормированное операторной нормой, и его полнота. Теорема Банаха–Штейнгауза и полнота пространства линейных ограниченных операторов относительно поточечной сходимости. Обратный оператор, критерий ограниченности обратного оператора. Теоремы Банаха об открытом отображении и об обратном операторе.

7. Сопряжённое пространство, теоремы Рисса–Фреше и Хана–Банаха.

Сопряжённое пространство к линейному нормированному пространству. Теорема Рисса–Фреше об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Теорема Хана–Банаха и её следствия.

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Стандартная учебная аудитория.

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

### **Основная литература**

1. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] : учебник для вузов / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — 7-е изд. — М. : Физматлит, 2004, 2006, 2009, 2012. — 572 с.
2. Краткий курс функционального анализа, Электронная версия печатной публикации / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — Санкт-Петербург, Лань, 2021

### **Дополнительная литература**

1. Лекции по функциональному анализу [Текст] : учеб. пособие для вузов / Р. В. Константинов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т. — М. : МФТИ, 2009. — 368 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

1. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
4. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Для контроля и коррекции знаний обучающиеся могут использовать задачи и тесты, размещённые на сайте [http:// sites.google.com/site/mathkonst/home/funkcionalnyj-analiz](http://sites.google.com/site/mathkonst/home/funkcionalnyj-analiz).

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над каждой темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- изучение лекций и рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций и учебной литературе),
- подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения,
- доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на лекциях и практических занятиях,

– подготовку к практическим занятиям, коллоквиумам, зачёту и экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций. Показателем владения материалом служит умение решать практические и теоретические задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике, студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения. При подготовке к практическим занятиям необходимо повторять ранее изученные основные определения, формулировки теорем. В начале занятия, как правило, проводится короткий (10-15 минут) опрос по материалу прошедших занятий в устной или письменной форме. Обычно придерживаются следующей схемы: изучение материала лекции по конспекту в тот же день, когда была прослушана лекция (10-15 минут); повторение материала накануне следующей лекции (10-15 минут), проработка учебного материала по конспектам лекций, учебной и научной литературе, подготовка ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения (1 час неделю), подготовка к практическому занятию, решение задач (1 час). Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия. Обязательным требованием является выполнение домашних работ, которые оформляются в специально отведённой для этого тетради и систематически сдаются на проверку. Промежуточный контроль знаний проводится в виде промежуточных мини-контрольных работ, на которых студенту предлагается письменно ответить на теоретический вопрос и решить две задачи по сдаваемой теме.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** АІ360: Передовые методы искусственного интеллекта  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра высшей математики  
**курс:** 3  
**квалификация:** бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Экзамен

**Разработчик:** С.П. Коновалов, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
УК-6 Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.2 Способен планировать самостоятельную деятельность в решении профессиональных задач; подвергать критическому анализу проделанную работу; находить и творчески использовать имеющийся опыт в соответствии с задачами саморазвития

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Функциональный анализ» обучающийся должен:

### знать:

- определения топологического пространства, непрерывных отображений топологических пространств;
- определение метрического пространства, определения его полноты и сепарабельности, определение пополнения неполного метрического пространства;
- принцип Банаха сжимающих отображений полного метрического пространства и технику его применения;
- определения топологического и секвенциального компакта в топологическом пространстве и их связь, критерий компактности в метрическом пространстве;
- критерии вполне ограниченности множеств в стандартных метрических пространствах;
- определения линейного нормированного, банахова и гильбертова пространств, и их свойства;
- свойства ортонормированных базисов в сепарабельных гильбертовых пространствах, теорему о проекции;
- определение линейного ограниченного оператора, действующего в нормированных пространствах, определения нормы оператора, пространства линейных ограниченных операторов и его свойства, теорему Банаха–Штейнгауза; определение обратного оператора;
- определение пространства, сопряжённое к линейному нормированному пространству, теорему Рисса–Фреше, теорему Хана–Банаха.

### уметь:

- исследовать полноту и сепарабельность метрического пространства, строить пополнение неполного метрического пространства;
- исследовать ограниченность, вполне ограниченность и компактность множества метрического пространства;
- исследовать эквивалентность норм в линейном пространстве, и уметь сравнивать топологии, порождённые разными нормами в линейном пространстве;
- вычислять норму и исследовать ограниченность линейного оператора, действующего в нормированных пространствах;
- исследовать различные сходимости последовательности линейных ограниченных операторов: по операторной норме и поточечную.

### владеть:

- методами исследования полноты, сепарабельности и пополнения метрического пространства;
- методами исследования свойства вполне ограниченности множеств в стандартных метрических пространствах;
- методами вычисления нормы линейного оператора;
- методами нахождения сопряжённого пространства стандартных банаховых пространств.



### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется на основе балльно-рейтинговой системы (БРС) оценки знаний по изучаемой дисциплине. БРС учитывает выполнение студентами совокупности домашних заданий и контрольных работ в соответствии с учебным планом. Данные о посещаемости и текущей успеваемости вносятся преподавателями в специальные журналы и учитываются в БРС.

Текущий контроль на основе домашних заданий осуществляется в течении учебного семестра в сроки, установленные Учебным управлением, в соответствии с учебным планом.

Для сдачи задания студент обязан предоставить решение задачи домашнего задания в письменной форме, ответить на вопросы преподавателя и написать контрольную работу по заданию, по которой проверяются знание понятий и утверждений по темам сдаваемого задания и умению решать задачи.

Во время выполнения контрольной работы нельзя пользоваться помощью других лиц, вычислительной техники и мобильными телефонами.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Теорема о вложенных шарах.
2. Принцип сжимающих отображений.
3. Критерий компактности.
4. Теорема Арцела--Асколи.
5. Теорема Рисса.
6. Гильбертово пространство. Теорема о проекции.
7. Топологии и сходимости в пространстве операторов  $L(E_1, E_2)$ . Норма оператора. Полнота пространства  $L(E_1, E_2)$
8. Теорема Банаха--Штейнгауза.
9. Функционалы в гильбертовом пространстве.
10. Теорема Рисса--Фреше.
11. Теорема Хана--Банаха и её следствия.

Пример билета:

Билет 1:

1. Теорема Арцела--Асколи.
2. Теорема Рисса.

#### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 1 астрономический час на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не должен превышать двух астрономических часов. Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться только программой дисциплины.

«СОГЛАСОВАНО»

Проректор по учебной работе

\_\_\_\_\_ А. А. Воронов

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

## Бально—рейтинговая система оценки знаний студентов

Дисциплина: Функциональный анализ, 3 курс, 5 семестр — экзамен  
ФПМИ(ФИВТ)

Кафедра: высшей математики

№	Вид знаний	Сумма баллов
1.	Задание	0–30

Регламент принятия домашних заданий и проведения экзамена определяется «Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов на кафедре высшей математики».

Зав. кафедрой

Г. Е. Иванов